بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
سی‌امین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۰

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
۱۵	۱۰	۱۸۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

دانش‌آموزان عزیز، در این بخش شمابابد به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن راجداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید، حتی نوشتن رقم ۶ به شکل ٦ هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱- فرض کنید a، b و c اعدادی طبیعی باشند که $ac = ۲۰۱۲$، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک a و b برابر ۱ و کوچک‌ترین مضرب‌مشترک b و c برابر ۱۳۹۰ است. مقدار $a+b+c$ چند است؟

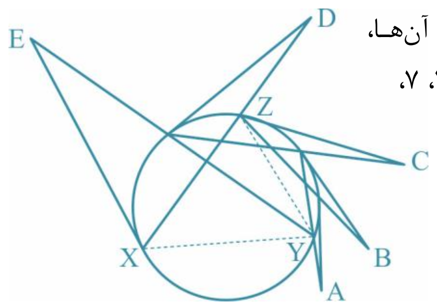
۲- اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهان‌گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همه بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)

۳- مجموع اعداد حقیقی نامنفی a ، b و c برابر ۳۰ است. بیشترین مقدار ممکن $۳ab + ۴bc$ چقدر است؟

۴- به چند حالت می‌توان در عبارت $\pm۱ \pm ۲ \pm \ldots \pm ۷$ مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

۵- در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نه تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصله بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ‌ها خاموش شده‌اند اما در فاصله کمتر از شصت متر از هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چندتاست؟

۶- شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آن‌ها، شکل روبه‌رو حاصل شده است. اگر زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ به ترتیب، برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازه زاویه XYZ را بر حسب درجه بنویسید.
(اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)



۷- A و فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت a و b و ab، به ترتیب، برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد $b^۲$ چند مقسوم علیه مثبت دارد؟

۸- به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول ۴×۴ قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۹- در مثلث ABC داریم $\angle BAC = ۶۰^\circ$، $AB = ۷\sqrt{۳}$ و $AC = ۱۴\sqrt{۳}$. نقطه متغیر X را روی پاره‌خط BC در نظر می‌گیریم. از نقطه X دو خط به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا به ترتیب AC و AB را در نقاط Y و Z قطع کنند. طول پاره‌خط BX چقدر باشد تا پاره‌خط YZ کمترین طول ممکن را داشته باشد؟

-۱۰ چندجمله‌ای $P(x)$ برابر است با مجموع x^nهایی که $۱ \leq n \leq ۱۲۰$ و n بر دست‌کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. این چندجمله‌ای چند ریشه حقیق متمایز دارد؟

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج گزینه‌ای پاسخ دهید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.

-۱ یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعده ۴×۶ روی زمین قرار دارد. نقطه A روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می‌غلطانیم و این کار را در همان جهت آنقدر ادامه می‌دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطه A چه مسافتی را در فضا طی کرده است؟

الف) ۳π ب) ۴π ج) ۶π د) ۸π هـ) ۱۲π

-۲ سه مجموعه A، B و C را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌ها، برابر مجموعه اعضایی است که دست‌کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

الف) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ ب) $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$ ج) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$

د) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$ هـ) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند.

-۳ به چند روش می‌توان مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۳۰\}$ را دو قسمت کرد که حاصل‌ضرب اعضای آن‌ها با یکدیگر برابر باشد؟

الف) این کار ممکن نیست. ب) بین ۱ و ۱۰ روش ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش

د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش هـ) بیش از ۱۰۰۰ روش

-۴ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC به زاویه رأس A و طول ۱۰ ساق مفروض است. نقطه دل‌خواه D در صفحه مفروض است به طوری که، نقطه A داخل مثلث BCD قرار می‌گیرد. نیم‌سازهای داخلی زوایای $\angle BAD$ و $\angle CAD$ را رسم می‌کنیم تا اضلاع BD و CD را به ترتیب، در نقاط E و F قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث BCD واقع بر پاره‌خط EF باشد، طول پاره خط AD چقدر است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۳۰ هـ) بستگی به مکان D دارد.

-۵ چند جمله‌ای $x^۴ - x^۲ - ۲x - ۱$ را در نظر بگیرید. مجموعه xهایی که به ازای آن‌ها این چندجمله‌ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

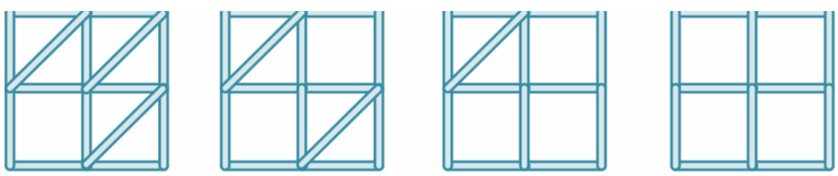
الف) یک پاره‌خط ب) دو پاره‌خط ج) یک پاره‌خط و یک نیم‌خط

د) یک پاره‌خط و دو نیم‌خط هـ) دو نیم‌خط

-۶ به چند طریق می‌توان دو عدد طبیعی a و b را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر $\frac{a+b}{a-b}$ عددی طبیعی باشد؟

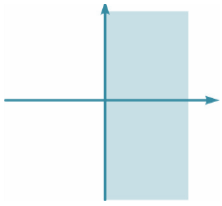
الف) ۱۹ ب) ۲۴ ج) ۲۸ د) ۲۹ هـ) ۳۴

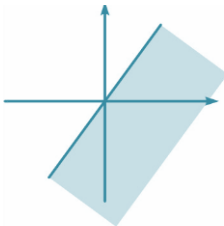
-۷ فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعه چوبی به طول‌های یک متر و $\sqrt{۲}$ متر چهار شکل زیر را ساخته‌ایم به طوری که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولا بچرخند. چند تا از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه چوب‌ها تغییر شکل دهند؟

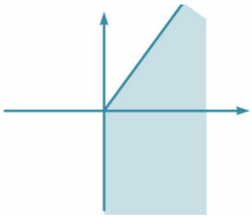


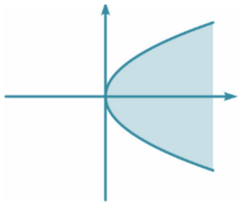
الف) هیچ‌کدام ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۸- مجموعه نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل $(x^{۲}+y^{۲}, xy)$ هستند، که x و y اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکل‌ها تقریبی هستند.)

الف) 

ب) 

ج) 

د) 

هـ) 

۹- یک وزغ و یک ملخ در فاصله ۲ متری یک‌دیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت ملخ، روی زمین، حرمت می‌کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت وزغ می‌پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می‌خورد و می‌ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟

الف) ۸ ب) ۱۷ ج) ۱۸ د) ۲۴ هـ) ۳۲

۱۰- فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) بی‌نهایت هـ) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

۱۱- بزرگ‌ترین عدد حقیقی a که برای هر دو عدد حقیقی x و y که $xy^{۲}+۴x^{۲}y+۵=۰$ و $x>۰$، داشته باشیم $ax<y$ کدام است؟

الف) $-\sqrt[۳]{۸۰}$ ب) -۴ ج) ۰ د) ۴ هـ) $\sqrt[۳]{۸۰}$

۱۲- به چند طریق می‌توان سه عدد طبیعی x و y و z را انتخاب کرد که $x+y+۲z=xyz$

الف) ۷ ب) ۴ ج) ۲ د) ۱ هـ) ممکن نیست.

۱۳- رستوران «مرغ تخم‌طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیمرو، املت و تخم‌مرغ آب‌پز را ارائه می‌کند! مدیر رستوران می‌خواهد برنامه هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

الف) ۷۸ ب) ۸۴ ج) ۱۲۶ د) ۱۶۸ هـ) ۱۹۲

۱۴- چند زوج مرتب xy از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^{۲} + y = xy^{۲} \\ y^{۲} + x = yx^{۲} \end{cases}$$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۱۵- فرض کنید چهارضلعی محدب $ABCD$ محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع از این چهار ضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می‌گیرند؟

الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تاب، گاهی سه‌تا و گاهی چهارتا

ب) گاهی دوتا و گاهی سه‌تا

ج) گاهی یکی وگاهی دو تا

د) همواره دو تا

هـ) همواره یکی

کلید سوالات

سوال	پاسخ
۱	ج
۲	هـ
۳	الف
۴	ج
۵	هـ
۶	ب
۷	د
۸	هـ
۹	ب
۱۰	ب
۱۱	ب
۱۲	الف
۱۳	ج
۱۴	ج
۱۵	د
۱۶	
۱۷	
۱۸	
۱۹	
۲۰	
۲۱	
۲۲	
۲۳	
۲۴	
۲۵	
۲۶	
۲۷	
۲۸	
۲۹	
۳۰	
۳۱	
۳۲	
۳۳	
۳۴	
۳۵	
۳۶	
۳۷	
۳۸	
۳۹	
۴۰	
۴۱	
۴۲	
۴۳	
۴۴	
۴۵	
۴۶	
۴۷	
۴۸	
۴۹	
۵۰	
۵۱	
۵۲	
۵۳	
۵۴	
۵۵	
۵۶	
۵۷	
۵۸	
۵۹	
۶۰	

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۰

سوالات کوتاه پاسخ براساس کد یک.

-۱۴ تجزیه‌ی ۲۰۱۲ به عوامل اول به صورت $۲۰۱۲ = ۵۰۳ \times ۲^۲$ است که چون ac=۲۰۱۲ پس باید دقیقاً یکی از a و c بر ۵۰۳ بخش‌پذیر باشد. حالت $۵۰۳|c$ با توجه به اینکه $c\big|[a,b] = ۱۳۹۰$ و این که ۱۳۹۰ بر ۵۰۳ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد. پس $۵۰۳|a$ و لذا حالت‌های زیر را داریم:

الف. a=۵۰۳ و c=۴ . از آن جا که ۱۳۹۰=[b,c] بر c=۴ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد.

ب. a=۱۰۰۶ و c=۳. از آن‌جا که ۱۳۹۰=[b,c] ، مقدار b برابر ۶۹۵ و یا ۱۳۹۰ است که چون a و b طبق فرض مسئله عامل مشترک ندارند تنها حالت b=۶۹۵ قابل قبول است که در این حالت $a+b+c = ۱۷۰۳$.

پ. $a = ۲۰۱۲$ و $c = ۱$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$، b باید برابر ۱۳۹۰ باشد که با $(a,b) = ۱$ تناقض دارد.

بنابراین پاسخ مسئله ۱۷۰۳ است.

-۲ در سفر اول مجبوریم که به شکرستان برویم. در ۱۱ سفر بعدی، در سفرهای فرد به یکی از توابع شکرستان می‌رویم و در سفرهای زوج به شکرستان باز می‌گردیم. پس تنها سفرهای فرد که شش‌تا هستند را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که دقیقاً یکی از این سفرها به سماقستان است. برای انتخاب این سفر از بین ۶ سفر ۶ حالت داریم. برای مقصد هر کدام از ۵ سفر دیگر هم ۲ گزینه‌ی نمکستان و فلفلستان وجود دارد. پس طبق اصل ضرب پاسخ مسئله $۶ \times ۲^۵ = ۱۹۲$است.

-۳ بیش‌ترین مقدار ممکن برای $۳ab + ۴bc$ برابر ۹۰۰ است. برای اثبات این حکم ابتدا یک لم را بیان اثبات می‌کنیم.

لم. برای هردو عدد حقیقی x و y ، $۴xy \le (x+y)^۲$.

اثبات. $(x+y)^۲ - ۴xy = (x-y)^۲ \ge ۰$

$$۳ab + ۴bc = ۴(a+c)b - ab \le ۴(a+c)b \le ((a+b)+c)^۲ = ۹۰۰$$

و تساوی زمانی است که $ab = ۰$ و $a+c = b = ۱۵$ و لذا $a = ۰$ و $b = c = ۱۵$

-۴ دقت کنید که اگر در چنین عبارتی مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر s باشد، عدد حاصل برابر $۲۸ - ۲s$ خواهد بـود. (۲۸=۱+۲+...+۷)

به علاوه دقت کنید اگر با یک ترکیب از مثبت و منفی‌ها به عددی مثبت برسیم، اگر به جای مثبت‌ها منفی و به جای منفی‌ها مثبت قرار دهیم به عددی منفی می‌رسیم و بالعکس. پس تعداد حالت‌هایی که به مثبت می‌رسیم دقیقاً برابر تعداد حالت‌هایی است که به منفی می‌رسیم. با این توضیحات باید تعداد حالت‌هایی را پیدا کنیم که به حاصل صفر می‌رسیم.

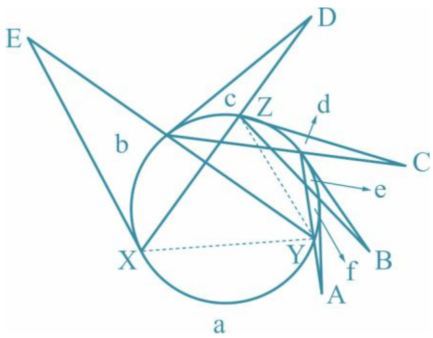
طبق توضیحات ابتدایی برای این که عدد حاصل برابر صفر شود باید مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر ۱۴ باشد. پس باید تعداد حالت‌های انتخاب چنین اعدادی را بشماریم. حال اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۷ باشد، باید مجموع اعداد دیگر برابر ۷ شود که حالت‌های ممکن ۱,۶ , ۲,۵ , ۳,۴ و ۱,۲,۴ است. اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۶ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۸ شود که حالت‌های ممکن ۵,۳ , ۱,۲,۵ , ۱,۳,۴ هستند و اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۵ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۹ شود که فقط حالت ۲,۳,۴ این طور است. بنابراین در هشت حالت به حاصل صفر می‌رسیم و در غیر از این هشت حالت در نیمی از حالات به مثبت و در نیم دیگر به منفی می‌رسیم و چون تعداد کل علامت‌گذاری‌های ممکن $۲^۷$ تا است، تعداد حالت‌های منجر به عدد مثبت $\frac{۲^۷ - ۸}{۲} = ۶۰$ است.

۵- چراغ‌ها را مطابق شکل زیر به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

اگر در یک دسته بیش‌تر از ۴ چراغ خاموش باشد، پس یکی از دو چراغ وسطی این آن دسته خاموش است. توجه کنید از آن‌جا که این چراغ از پنج چراغ دیگر هم‌دسته‌اش فاصله‌ای کم‌تر از ۶۰ متر دارد، با این فرض که در همسایگی ۶۰ متری هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر قرار دارد تناقض دارد. پس در هر دسته حداکثر چهار چراغ خاموش داریم و بنابراین در کل حداکثر ۱۲ چراغ می‌تواند خاموش باشد. شکل زیر مثالی برای ۱۲ چراغ را نمایش می‌دهد. (دایره‌های توخالی چراغ‌های خاموش هستند.)

۶- مانند شکل روبه‌رو کمان‌هایی را نام‌گذاری می‌کنیم. در این صورت معلومات سؤال معادل این خواهد بود که

$e-f=۸^\circ, d-e=۱۴^\circ,$
$c-d=۲۰^\circ, b-c=۲۶^\circ,$
$a-b=۳۲^\circ$



هم‌چنین می‌دانیم $a+b+c+d+e+f=۳۶۰^\circ$. حال همه‌ی زاویه‌ها را برحسب f می‌نویسیم و در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم.

$$f+\overbrace{(f+۸^\circ)}^{e}+\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ)}^{d}+\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ)}^{c}+$$
$$\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ+۲۶^\circ)}^{b}+\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ+۲۶^\circ+۳۲^\circ)}^{a}=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۶f+۲۴۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow f=۲۰^\circ \Rightarrow c=۶۲^\circ, b=۸۸^\circ$$
$$\Rightarrow \angle XYZ=\frac{b+c}{۲}=\frac{۶۲^\circ+۸۸^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

۷- توجه کنید که اگر تجزیه‌ی عدد طبیعی n به صورت حاصل ضرب اعداد اول به شکل $p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن که با نماد d(n) نمایش می‌دهیم برابر $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\dots(\alpha_k+۱)$ خواهد بود.

طبق فرض‌های صورت سوال در مورد تعداد مقسوم علیه‌های این اعداد، a به شکل $p^۲$ و b باید به شکل $q^۳$ و یا rs باشد که p، q، r و s اعداد اول هستند و $r\neq s$. بنابراین ab باید به شکل $q^۳p^۲$ و یا $rsp^۲$ باشد. حال حالت‌های زیر متصور هستند.

الف. $ab=q^۳p^۲$. اگر p=q، d(ab)=۶ و اگر $p\neq q$، d(ab)=۱۲ که هیچ کدام قابل قبول نیستند.

ب. $ab=rsp^۲$. اگر r، s و p سه عدد اول متمایز باشند، d(ab)=۱۲ که باز هم قابل قبول نیست. بنابراین p با یکی از r و s برابر است که می‌توان فرض کرد p=r. در این صورت $ab=sp^۳$ و لذا d(ab)=۸ که حالت مورد قبول است.

بنابراین b به شکل ps است و لذا $b^۲=p^۲s^۲$ و این نتیجه می‌دهد که تعداد مقسوم‌علیه‌های $b^۲$ برابر ۹ است.

۸- برای انتخاب خانه‌ای از سطر اول که مهره در آن قرار می‌گیرد ۴ حالت داریم. باانتخاب مهره‌ی سطراول در یکی از خانه‌های سطر دوم نمی‌توان مهره قرار داد، پس برای انتخاب خانه‌ای که مهره‌ی سطر دوم در آن قرار می‌گیرد ۳ حالت داریم. به همین ترتیب برای انتخاب خانه‌هایی از سطر سوم و چهارم که مهره‌ها در آن‌ها قرار می‌گیرد به ترتیب ۲ و ۱ حالت داریم. پس پاسخ مسئله برابر است با ۲۴=۱×۲×۳×۴.

۹- اگر پای عمود وارد از C بر ضلع AB را H بنامیم، مثلث AHC مثلثی قائم‌الزاویه‌ای با وتر به طول $۱۴\sqrt{۳}$ است که $\angle CAH = ۶۰^\circ$. پس

$$AH = AC.\cos(\angle CAH) = AC.\cos(۶۰^\circ) = ۱۴\sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲} = ۷\sqrt{۳} = AB$$

و لذا B همان نقطه‌ی H است و این یعنی مثلث ABC خود قائم‌الزاویه است $(\angle B = ۹۰^\circ)$ و طبق قضیه‌ی فیثاغورس $BC = \sqrt{۱۴^۲ \times ۳ - ۷^۲ \times ۳} = ۷\sqrt{۹} = ۲۱$.

حال طول YZ را برحسب BX محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه فیثاغورس در مثلث YZS داریم:

$$YZ^۲ = ZS^۲ + YS^۲ = BX^۲ + (YX - ZB)^۲$$

طبق قضیه‌ی تالس و از آن‌جا که $YX \| AB$، $\frac{YX}{AB} = \frac{CX}{BC}$ و لذا $\frac{۲۱ - BX}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۱ - BX}{۲۱} YX = ۷\sqrt{۳}$.

از طرف دیگر با توجه به این که $\angle ZXB = ۳۰^\circ$ و $\frac{ZB}{BX} = \tan(\angle ZXB) = \tan(۳۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ به دست می‌آوریم که $ZB = \frac{BX}{\sqrt{۳}}$.

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی اخیر در عبارت مربوط به YZ خواهیم داشت:

$$YZ^۲ = BX^۲ + \left(\frac{۲۱ - ۲BX}{\sqrt{۳}}\right)^۲$$
$$\Rightarrow ۳YZ^۲ = ۷BX^۲ - ۸۴BX + ۴۴۱ = ۷(BX^۲ - ۱۲BX + ۳۶) + ۱۸۹$$
$$\Rightarrow YZ^۲ = \frac{۷}{۳}(BX - ۶)^۲ + \frac{۱۸۹}{۳} \geq \frac{۱۸۹}{۳}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $YZ^۲$ برابر $\frac{۱۸۹}{۳}$ است و زمانی که به این مقدار می‌رسیم که BX=۶ باشد.

۱۰- اعدادی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر هستند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر۶، یکی از اعداد ۰، ۲، ۳، ۴ باشد، معادلاً به فرم $۶k + ۲, ۶k$ و $۶k + ۳$ و یا $۶k + ۴$ باشد. بنابراین داریم

$$P(x) \sum_{\substack{(n,۶) \\ ۱\leq n \leq ۱۲۰}} x^n$$
$$= \sum_{۱\leq ۶k \leq ۱۲۰} x^{۶k} + \sum_{۱\leq ۶k+۲ \leq ۱۲۰} x^{۶k+۲} + \sum_{۱\leq ۶k+۳ \leq ۱۲۰} x^{۶k+۳} + \sum_{۱\leq ۶k+۴ \leq ۱۲۰} x^{۶k+۴}$$
$$= \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۶} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۲} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۳} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۴}$$
$$= (x^۶ + x^۲ + x^۳ + x^۴)(\sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k})$$
$$= x^۲(۱ + x + x^۲ + x^۴)(۱ + x^۶ + x^{۱۲} + ... + x^{۱۱۴})$$

حال دقت کنید که همه‌ی جملات عبارت $x^{۶}+x^{۱۲}+\ldots+x^{۱۱۴}$ نامنفی هستند و لذا

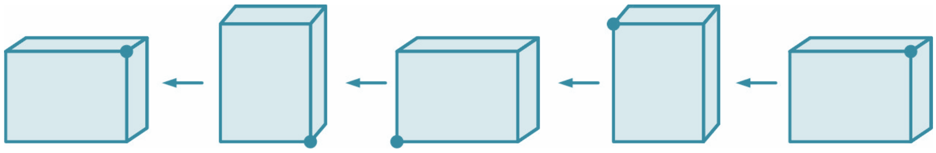
$$۱+x^{۶}+x^{۱۲}+\ldots+x^{۱۱۴}>۰$$

و بنابراین چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد. از طرف دیگر $۱+x+x^{۲}$ یک چند جمله‌ای درجه دوم است که همواره مقدار آن مثبت است و با توجه به نامنفی بودن $x^{۴},x^{۴}$ $۱+x+x^{۲}+x^{۴}$هم همواره مثبت است و ریشه‌ی حقیقی ندارد. پس تنها ریشه‌ی چند جمله‌ای $\mathrm{P(x)}$ همان صفر است.

سوالات تستی براساس کد یک

۱- **گزینه‌ی [ج] صحیح است.**

جسم به شکل زیر روی زمین غلطیده:



(دقت کنید که نسبت عمق مکعب که برابر ۶ است به دلیل راحتی در رسم رعایت نشده است و ضمناً نقطه‌ی پررنگ در شکل‌های بالا محل نقطه‌یA را در هر گام مشخص می‌کند).

درهر مرحله مکعب مستطیل حول ضلع پایین سمت چپ چرخیده است. پس

در چرخش اول نقطه‌ی A ، ربع دایره‌ای به شعاع ۵ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۵}{۲}\pi=\frac{۲\pi\times ۵}{۴}$ را طی کرده است.

در چرخش دوم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۴ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $۲\pi=\frac{۲\pi\times ۴}{۴}$ را طی کرده است.

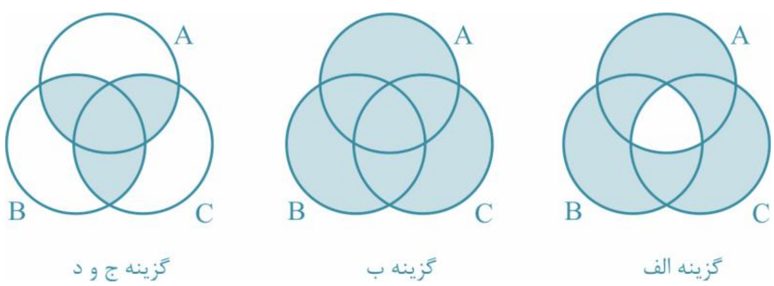
در چرخش سوم نقطه‌ی A ، ثابت مانده و بنابراین مسافتی طی نکرده است.

در چرخش چهارم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۳ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۳}{۲}\pi=\frac{۲\pi\times ۳}{۴}$ را طی کرده است.

بنابراین در کل این نقطه مسافت $\frac{۵}{۲}\pi+۲\pi+\frac{۳}{۲}\pi=۶\pi$ را طی کرده است.

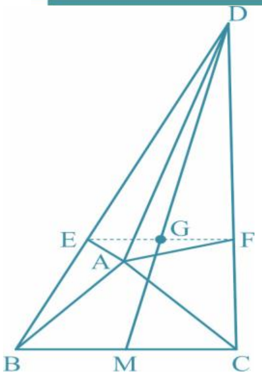
۲- **گزینه‌ی [هـ] صحیح است.**

از نمودار ون برای حل این سوال استفاده می‌کنیم.



۳- **گزینه‌ی [الف] صحیح است.**

اگر حاصل ضرب اعداد دو دسته برابر A باشد، $A^{۲}=۱\times۲\times\times\ldots\times۳۰=۳۰\,!$. اما در !۳۰ تنها یک عامل ۲۳ وجود دارد، پس امکان ندارد که !۳۰ مربع کامل باشد. بنابراین چنین عملی ممکن نیست.



۴- **گزینه‌ی [ج] صحیح است.**

باتوجه به این که پاره‌خط‌های AE و AF نیم‌ساز هستند، $\frac{DE}{EB}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DF}{FC}$ و بنابر قضیه‌ی تالس $EF \| BC$. حال چون EF از مرکز ثقل مثلث BCD می‌گذرد نتیجه می‌گیریم $\frac{2}{1}=\frac{DG}{GM}=\frac{DE}{EB}$ (M وسط ضلع BC است.) و بنابراین $2=\frac{DE}{EB}=\frac{AD}{AB}$.

پس $AD=2AB=20$.

۵- **گزینه‌ی [هـ] صحیح است.**

ابتدا دقت کنید که

$$x^4-x^2-2x-1=x^4-(x+1)^2=(x^2-x-1)(x^2+x+1)$$

عبارت $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ همواره مثبت است پس علامت چند جمله‌ای صورت سوال با علامت چند جمله‌ای x^2-x-1 یکسان است. عبارت x^2-x-1 یک سهمی است که دارای دو ریشه‌ی $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ است، پس برای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه‌ی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ریشه‌ی کوچک‌تر یعنی $(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty)$ که اجتماع دو نیم‌خط است، مقدار چندجمله‌ای نامنفی است.

۶- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

چون مقدار عبارت طبیعی شده و باتوجه به این که صورت کسر مثبت است، مخرج کسر هم باید مثبت باشد و بنابراین a>b. از طرف دیگر دقت کنید که $a-b|a+b$ معادل این است که $a-b|2b$.

حال مسئله را برحسب مقادیر مختلف b حالت‌بندی می‌کنیم.

$b=1, a-1|2$ پس $a-1\in 1,2$ و لذا $a\in 2,3$ دو حالت دارد.

$b=2, a-2|4$ پس $a-2\in 1,2,4$ و لذا $a\in 3,4,6$ سه حالت دارد.

$b=3, a-3|6$ پس $a-3\in 1,2,3,6$ و لذا $a\in 4,5,6,9$ چهار حالت دارد.

$b=4, a-4|8$ پس $a-4\in 1,2,4,8$ و لذا $a\in 5,6,8$ سه حالت دارد.

$b=5, a-5|10$ پس $a-5\in 1,2,5,10$ و لذا $a\in 6,7,10$ سه حالت دارد.

$b=6, a-6|12$ پس $a-6\in 1,2,3,4,6,12$ و لذا $a\in 7,8,9,10$ چهار حالت دارد.

$b=7, a-7|14$ پس $a-7\in 1,2,7,14$ و لذا $a\in 8,9$ دو حالت دارد.

$b=8, a-8|16$ پس $a-8\in 1,2,4,8,16$ و لذا $a\in 9,10$ یک حالت دارد.

$b=9, a-9|18$ پس $a-9\in 1,2,3,6,9,18$ و لذا $a\in 10$ یک حالت دارد.

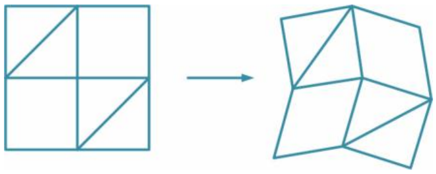
$b=10, a-10|20$ پس $a-10\in 1,2,4,5,10,20$ که چنین حالتی برای a امکان ندارد.

پس در کل به ۲۴=۱+۲+۲+۴+۳+۳+۴+۳+۲ حالت می‌توان این دو عدد را انتخاب کرد.

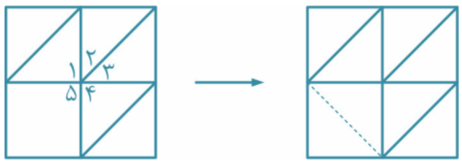
۷- **گزینه‌ی [د] صحیح است.**

ابتدا توجه کنید که مثلث‌ها نمی‌توانند تغییر شکل بدهند و در نتیجه زوایای درون هر مثلث ثابت هستند. ازطرف دیگر در یک لولا زاویه‌ی ثابت باشد، با استفاده از قواعد هم‌نهشتی مثلث‌ها می‌توان نشان داد که کل لولا باید ثابت بماند، پس می‌توان ضلع مقابل لولا را اضافه کرد، طوری که در انعطاف‌پذیری شکل تغییری ایجاد نشود. یعنی در شکل زیر اگر α ثابت باشد، می‌توان چوبی در روبه‌روی این زاویه αاضافه کرد، به گونه‌ای که به صورت سمت راست درآید.

توجه کنید که سومین شکل (از سمت راست) را می‌توان با حرکت دادن به صورت زیر تغییر داد. پس سه شکل اول قابل انعطاف هستند.



اما در شکل چهارم با توجه به توضیحات بالا که مثلث‌ها ثابت هستند، زاویه‌های شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ ثابت هستند. بنابراین زاویه‌ی ۵ هم باید ثابت باشد. پس با توجه به توضیحات بالا می‌توان تکه چوبی را بدون تغییر در انعطاف‌پذیری به شکل اضافه کرد طوری که همه‌ی چندضلعی‌های شکل مثلث شوند و به این ترتیب شکل غیرقابل انعطاف است.



پس در کل سه تا از شکل‌ها می‌توانند تغییر کنند.

۸- **گزینه‌ی [هـ] صحیح است.**

با توجه به نامساوی حسابی ـ هندسی می‌دانیم که $a^۲+b^۲=|a|^۲+|b|^۲\geq ۲|ab|$، پس ناحیه‌ی مورد سوال زیر مجموعه $\left\{(x,y)\middle| y<\frac{x}{۲}\right\}$است. از طرف دیگر اگر $x=\sqrt{a}.\sin\theta$ و$y=\sqrt{a}.\cos\theta$ باشد،$(x^۲+y^۲,xy)=(a,\frac{۱}{۲}\sin(۲\theta))$ و $\frac{۱}{۲}a\sin(۲\theta)$ برای مقادیر مختلف θ، کل بازه‌ی $\left[-\frac{a}{۲},\frac{a}{۲}\right]$را می‌پوشاند. پس در کل مجموعه‌ی موردنظر، $\left\{(x,y):|y|<\frac{x}{۲}\right\}$است.

۹- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

فرض کنید بعد از گذشت n ثانیه ملخ خورده شود. اگر وزغ بعد از خوردن ملخ به جای این که سرجای خود بایستند، با همان حرکت‌های ملخ خود را به جای نخستین ملخ برساند، n حرکت قبل از خوردن ملخ انجام داده و بعد از خوردن او هم n حرکت دیگر انجام داده است، پس در کل ۲n حرکت کرده است. بالعکس اگر وزغ با ۲n حرکت ۲ متر را طی کند، می‌توان n حرکت اول را حرکات وزغ و n حرکت بعدی را برعکس حرکات ملخ در نظر گرفت. در واقع ما تناظری بین تعداد راه‌های خورده شدن ملخ توسط وزغ و راه طی کردن مسیر ۲ متر با تعداد زوجی حرکت توسط وزغ برقرار کرده‌ایم. پس باید تعداد زوج حرکت‌هایی را بشماریم که وزغ در آن ۲ متر به جلو می‌رود. اگر به جای ۲۵ و ۵۰ سانتی‌متر، طول حرکات را ۱ و ۲ و کل مسیر را ۸ بگیریم، باید تعداد زوج حرکت‌هایی را بشماریم که در آن ۸ واحد طی می‌شود. تعریف می‌کنیم:

تعداد فرد حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.= O_n

تعداد زوج حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود= E_n

با توجه به حرکات وزغ که در هر مرحله یک یا دو واحد طی می‌کند به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$E_{n+1} = O_n + O_{n-1}$$
$$O_{n+1} = E_n + E_{n-1}$$

و هدف یافتن E_8 است. به کمک جدول زیر و با توجه به این که $E_1 = 0$ و $O_1 = O_2 = E_2 = 1$ این محاسبه را انجام می‌دهیم.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
O_n	۱	۱	۱	۳	۴	۶	۱۱	۱۷
E_n	۰	۱	۲	۲	۴	۷	۱۰	۱۷

پس پاسخ عدد ۱۷ است.

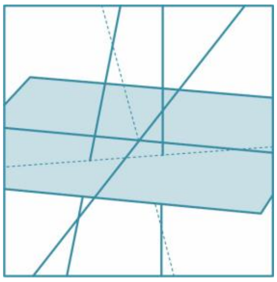
-۱۰ **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

فرض کنید l_1, l_2, l_3 و l_4 ۴خط صورت سوال باشند که l_1, l_2 در نقطه‌ی p متقاطع هستند. اگر خط l هر چهار خط را قطع کند با توجه به این که l_1, l_2 را هم قطع می‌کند یا باید از نقطه‌ی P بگذرد یا در صفحه‌ی شامل l_1, l_2 که صفحه‌ای یک‌تاست قرار دارد.

اگر چنین خطی که از نقطه‌ی P می‌گذرد موجود باشد، خطی یک‌تاست زیرا در غیر این صورت اگر l و l' دو خط با این خاصیت باشند، با توجه به این که هر دو شامل نقطه‌ی p هستند در یک صفحه قرار می‌گیرند و چون l_3, l_4 با هر دو خط تقاطع دارند، آن‌ها نیز باید در همین صفحه باشند که در این صورت باید با هم متقاطع یا موازی باشندکه خلاف فرض ماست.

اگر چنین خطی با در صفحه‌ی شامل l_1, l_2 باشد، از آن‌جا که اشتراک این صفحه با l_3, l_4 حداکثر در یک نقطه است.(اگر بیش‌تر از یک نقطه اشتراک داشته باشد کل خط باید در این صفحه باشد که باعث می‌شود با l_1, l_2 موازی و یا متقاطع شود که خلاف فرض است.) پس باید خط l از این دو نقطه بگذرد و بنابراین خط مورد نظر در این حالت هم یک‌تا است.

پس در کل حداکثر دو خط می‌توان داشت. می‌توان مطابق شکل زیر خط‌ها را با توجه به توضیحات بالا به گونه‌ای طراحی کرد که دو خط متقاطع با هر چهارتای آن‌ها موجود باشند. (خطوط قطعه‌قطعه دو خط مورد نظر هستند.)



-۱۱ **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$ و $x > 0$، در این صورت $y < 0$ زیرا اگر $y \geq 0$، $xy^2 + 4x^2y + 5 > 0$ که به وضوح تناقض است.

حال دقت کنید که

$$xy^2 + 4x^2y + 5 = 0 \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 4(\frac{y}{x}) = \frac{-5}{x^3} < 0 \Rightarrow (\frac{y}{x} + 4)(\frac{y}{x}) < 0$$

حال چون $\frac{y}{x} < 0$، $\frac{y}{x} + 4 > 0$ و معادلاً $y > -4x$. پس $a \geq -4$.

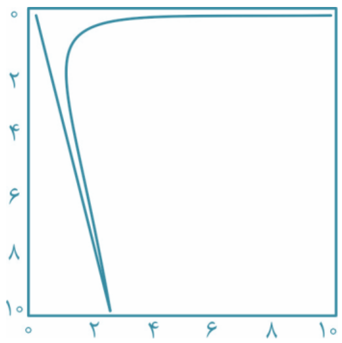
حال ادعا می‌کنیم $a = -4$. برای این منظور نشان می‌دهیم برای هر $-4 < a < 0$ می‌توان $x \in \mathbb{R}^+$ و $y \in \mathbb{R}^-$ یافت که $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0 (*)$ و ضمناً $y = ax$.

اگر $y=ax$ را در رابطه‌ی (※) جای‌گزین کنیم، داریم:

$$a^2x^3+4ax^3+5=0 \Leftrightarrow x^3=\frac{-5}{a(4+a)} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-5}{a(4+a)}}$$

که چون $-4<a<0$، عدد x که در بالا به دست آمده مثبت است و زوج x و y=ax در رابطه‌ی (*) صدق می‌کنند. پس بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a همان ۴- است.

توضیح: در شکل زیر مجموعه نقاطی در ناحیه‌ی چهارم مختصات که در رابطه‌ی (※) صدق می‌کنند و هم‌چنین نمودار خط y=-4x را می‌بینید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید نمودار در این ناحیه در بالای این خط قرار دارد.



-۱۲ **گزینه‌ی [الف] صحیح است.**

طبق رابطه‌ی صورت سوال $x+y=z(xy-2)$ و چون x، y و z طبیعی و درنتیجه مثبت هستند، xy-۲ هم طبیعی است و به علاوه $xy-2\,|\,x+y(*)$ و لذا $xy-2\le x+y$. ادعا می‌کنیم که یکی از x و y کم‌تر از ۳ است. به برهان خلف فرض کنید $x,y\ge 3$، حال داریم:

$$xy-2\le x+y \Rightarrow xy-x-y\le 2 \Rightarrow (x-1)(y-1)=xy-x-y+1\le 3$$

که رابطه‌ی آخر با توجه به این که $x-1\ge 2$ و $y-1\ge 2$ امکان ندارد.

حال مسئله را برحسب x و y حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول. $x=1$. طبق (※) باید $y-2\,|\,y+1$ معادلاً $y-2\,|\,3$ و لذا $y-2\in -3,-1,1,3$. این حالت در نهایت با توجه به طبیعی بودن x,y و $xy-2$ منجر به جواب‌های (۴، ۳، ۱) و (۲، ۵، ۱) می‌شود. (منظور از سه‌تایی (۲، ۵، ۱)، $x=1$، $y=5$ و $z=2$ است!)

حالت دوم. $x=2$. در این حالت طبق رابطه‌ی (※) باید $2y-2\,|\,y+2$ که این نتیجه می‌دهد $2y-2\,|\,(2y-2)-2(y+2)$ و لذا $y-1\,|\,3$. بنابراین $y-1\in -3,-1,1,3$. این حالت در نهایت توجه به طبیعی بودن x,y و xy-۲ منجر به جواب‌های (۲، ۲، ۲) و (۱، ۴، ۲) می‌شود.

حالت سوم. $y=1$. کاملاً شبیه حالت‌اول به جواب‌های (۴، ۱، ۳) و (۲، ۱، ۵) منجر می‌شود. (دقت کنید که به دلیل تقارن رابطه‌ی صورت سوال نسبت به x و y اگر $(x,y.z)$ جواب باشد، (y,x,z) هم جواب است.)

حالت چهارم. $y=2$. این حالت هم مشابه حالت دوم به (۲، ۲، ۲) و (۱، ۲، ۴) منجر می‌شود که جواب (۲، ۲، ۲) تکراری است. پس در کل مسئله ۷ جواب دارد.

-۱۳ **گزینه‌ی [ج] صحیح است.**

یک برنامه‌ریزی غذایی برای تعدادی روز در رستوران را «متنوع» می‌نامیم اگر غذای هر دو روز متوالی متفاوت باشد. حال a_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزی متنوع برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر متفاوت باشد. به همین ترتیب b_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزی متنوع رستوران برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر یکسان باشد. با این ادبیات هدف ما در مسئله یافتن a_7 است.

دقت کنید که اگر یک برنامه‌ریزی متنوع برای n روز داشته باشیم که غذای روز اول و آخر آن یکسان باشد، با حذف روز nاُم از برنامه به یک برنامه‌ریزی متنوع برای n-۱ روز می‌رسیم که غذای روز اول و آخر آن متفاوت است. یعنی $b_n = a_{n-1}$.

از طرف دیگر $a_n + b_n$ تعداد کل روش‌های برنامه‌ریزی متنوع برای رستوران است(با این تفاوت که هیچ رابطه‌ای بین غذای روز اول و آخر نداریم). در یک برنامه‌ریزی متنوع n روزه، برای انتخاب غذای روز اول سه حالت داریم. بعد از انتخاب غذای روز ۱ ول، برای انتخاب غذای روزهای بعد هر کدام ۲ حالت خواهیم داشت(غذای هر روز باید با غذای روز قبلش متفاوت باشد). پس تعداد کل چنین برنامه‌ریزی‌هایی $3\times\underbrace{2\times2\times\ldots\times2}_{n-1}$ است و این یعنی $a_n + b_n = 3\times2^{n-1}$. حال داریم:

$$a_n + b_n = 3\times2^{n-1} \xRightarrow{a_n=b_{n-1}} a_n = 3\times2^{n-1} - a_{n-1}$$

$$a_n = 3\times2^{n-1} - (3\times2^{n-2} - a_{n-2}) = 3\times2^{n-2} + a_{n-2}$$

با توجه به این رابطه‌ی بازگشتی برای a_7

$$a_7 = 3\times2^5 + a_5 = 3\times(2^5+2^3) + a_3 = 3\times(2^5+2^3+2^1) + a_1$$

که $a_1 = 0$ (در برنامه‌ریزی برای یک روز حتماً غذای روز اول و آخر یکی می‌شود!) و در نتیجه $a_7 = 3\times42 = 126$.

-۱۴ ماخ **گزینه‌ی [ج] صحیح است.**

با جمع و تفریق کردن دو رابطه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y = xy^2 \\ y^2 + x = yx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (x+y)(1-xy) = 0 & (I) \\ x^2 - y^2 + (x-y)(xy-1) = 0 & (II) \end{cases}$$

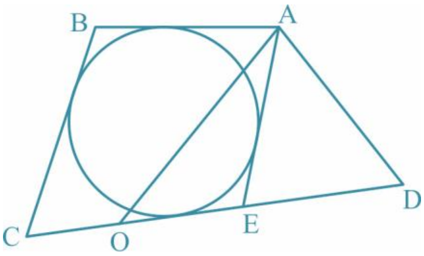
با استفاده از (II) خواهیم داشت:

$$(x-y)(x+y+xy-1) = 0$$

پس $x = y$ و یا $x+y = 1-xy$. اگر $x+y = 1-xy$ با توجه به (I) باید داشته باشیم $x^2+y^2+(x+y)^2 = 0$ که این نتیجه می‌دهد $x = y = 0$. پس در هر صورت x=y:

$$x = y \Rightarrow x + x^2 = x^3 \Rightarrow x(x^2-x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{1\pm\sqrt5}{2}$$

پس دستگاه معادلات، ۳ جواب حقیقی دارد.



-۱۵ ماخ **گزینه‌ی [د] صحیح است.**

ادعا: با فرض محیطی نبودن چهار ضلعی ABCD ادعا می‌کنیم که دایره‌ی مماس بر AB,BC,CD (ω)، ضلع DA را قطع می‌کند اگر و تنها اگر BC+AD>BA+CD.

اثبات ادعا: سه حالت محتمل است:

حالت اول. AD، (ω) را قطع نکند. در این صورت مماس AX را رسم کرده و چون چهارضلعی ABCX محیطی است، AB+CX=BC+AX و همچنین طبق نابرابری مثلث داریم که AX+XD>AD پس

AD+BC-XD<AX+BC=AB+CX

$$\Rightarrow AD + BC < AB + CX + XD = AB + CD$$

و می‌بینیم که در این حالت حکم برقرار است.

حالت دوم. AD بر (ω) مماس باشد.

در این حالت چهارضعلی ABCD محیطی می‌شود که خلاف فرض است.

حالت سوم: AD، (ω) را در دو نقطه قطع می‌کند.

در این حالت نیز مماس AX را رسم کرده و باز هم $AB+CX=BC+AX$ همچنین بنابر نابرابری مثلث $AD+DX>AX$ پس

DX+AD+BC>AX+BC=AB+CX

$\Rightarrow AD+BC<AB+CX-DX=AB+CD$

و در این حالت نیز حکم تصدیق می‌شود.

پس ادعا در کل صادق است.

حال به سوال بر می‌گردیم. طبق فرض سوال می‌دانیم دقیقاً یکی از مقادیر AB+CD و AD+BC از دیگری کوچک‌تر است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم AD+BC<AB+CD. در این صورت دقیقاً دو دایره‌ای که بر اضلاع AB,CD مماس نیستند کاملاً درون چهارضلعی قرار خواهند داشت. پس گزینه‌ی (د) درست می‌باشد.